

*Marco Barlotti*

Appunti integrativi su

**ALBERI**

**E**

**GRAFI PIANI**

per l'insegnamento di  
**TEORIA DEI GRAFI E APPLICAZIONI**  
per il corso di laurea triennale in Matematica

Vers. 0.1

Anno Accademico 2004-2005

## **AVVERTENZA**

Tutti i diritti di questa pubblicazione sono dell'autore.

È consentita la riproduzione integrale di questa pubblicazione a titolo gratuito.

È altresì consentita a titolo gratuito l'utilizzazione di parti di questa pubblicazione in altra opera all'inderogabile condizione che ne venga citata la provenienza e che della nuova opera nella sua interezza vengano consentite la riproduzione integrale a titolo gratuito e l'utilizzazione di parti a queste stesse condizioni.

L'uso di questa pubblicazione in qualsiasi forma comporta l'accettazione integrale e senza riserve di quanto sopra.

# Complementi sugli alberi

Ricordiamo che si dice **albero** un grafo connesso privo di circuiti. In particolare, l'assenza di circuiti comporta che ogni albero sia un grafo *semplice*, in cui cioè la funzione di incidenza è iniettiva; per questo motivo è possibile identificare (e noi lo faremo in questi appunti) ogni lato del grafo con la coppia di vertici con cui esso è incidente.

## Teorema A.1

Sia  $\mathbf{A}$  un albero con  $n$  vertici, e sia  $\Gamma$  un grafo in cui ogni vertice ha grado almeno  $n - 1$ . Allora  $\mathbf{A}$  è (isomorfo a) un sottografo di  $\Gamma$ .

*Dimostrazione* – Procediamo per induzione su  $n$ . Se  $n = 1$ ,  $\mathbf{A}$  consiste di un punto isolato e certamente è (isomorfo a un) sottografo di qualsiasi grafo dato.

Supponiamo dunque che l'asserto sia vero per  $n - 1$ . Sia  $v$  un vertice di grado 1 (“una foglia”) di  $\mathbf{A}$ , sia  $l$  il lato (l'unico lato!) incidente con  $v$ , e sia  $w$  l'altro vertice incidente con  $l$ ; sia  $\mathbf{A}_1$  l'albero ottenuto da  $\mathbf{A}$  sopprimendo  $v$  e  $l$ . Poiché  $\mathbf{A}_1$  è un albero con  $n - 1$  vertici, per l'ipotesi di induzione  $\mathbf{A}_1$  è isomorfo a un sottografo di  $\Gamma$ . Sia  $w_0$  il vertice di  $\Gamma$  che corrisponde a  $w$  in tale isomorfismo; poiché (per ipotesi)  $w_0$  ha grado almeno  $n - 1$ , c'è almeno un vertice  $v_0$  adiacente a  $w_0$  che in tale isomorfismo non corrisponde a nessun vertice di  $\mathbf{A}_1$ : è dunque possibile “estendere” tale isomorfismo a tutto  $\mathbf{A}$ , e il teorema è così dimostrato.

Siano dati  $n$  vertici  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Non è nota alcuna ragionevole “formula chiusa” che fornisca il numero degli alberi *non isomorfi* con vertici  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Possiamo però calcolare il numero degli alberi *diversi* con vertici  $v_1, v_2, \dots, v_n$  (due alberi con gli stessi vertici sono *diversi* se differiscono per almeno un lato; come si è già detto, identifichiamo ciascun lato con la coppia di vertici incidenti con lui).

## Teorema A.2 (Cayley)

Siano dati  $n$  vertici  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Il numero degli alberi *diversi* con vertici  $v_1, v_2, \dots, v_n$  è

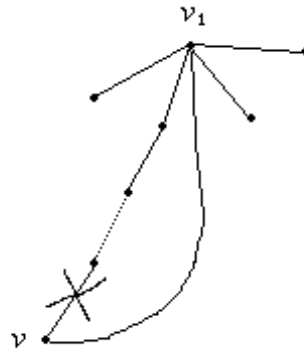
$$n^{n-2}.$$

*Dimostrazione* – Classifichiamo tutti gli alberi con i vertici dati in base al grado  $d$  del vertice  $v_1$ . Per  $d = 1, 2, \dots, n - 1$  gli alberi in cui il vertice  $v_1$  ha grado  $d$  saranno detti “alberi di tipo  $d$ ”; indichiamo con  $N_d$  il numero degli alberi di tipo  $d$ . È chiaro che  $N_{n-1} = 1$ , e che il numero degli alberi *diversi* con vertici  $v_1, v_2, \dots, v_n$  è

$$\sum_{d=1}^{n-1} N_d.$$

Vogliamo trovare un'espressione per ciascun  $N_d$ , e a tale scopo ragioniamo su come dai diversi alberi di tipo  $d - 1$  si possono ottenere tutti i diversi alberi di tipo  $d$ .

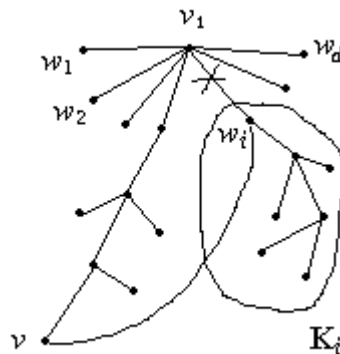
Sia  $\mathbf{A}$  un albero di tipo  $d - 1$ ; per ogni vertice  $v$  distinto da  $v_1$  e non adiacente a  $v_1$  otteniamo un diverso albero  $\mathbf{A}'$  di tipo  $d$  sopprimendo il lato incidente con  $v$  del (l'unico!) cammino di estremi  $v$  e  $v_1$  e aggiungendo il lato  $\{v, v_1\}$ : nell'albero  $\mathbf{A}'$  così ottenuto, anche  $v_1$  risulta così adiacente a  $v$  e dunque  $\mathbf{A}'$  è di tipo  $d$ .



Siccome i vertici  $v$  di  $\mathbf{A}$  distinti da  $v_1$  e non adiacenti a  $v_1$  sono in numero di  $n - (d - 1) - 1 = n - d$ , da ognuno degli  $N_{d-1}$  alberi di tipo  $d - 1$  si possono ottenere  $n - d$  alberi di tipo  $d$ . Le coppie  $(\mathbf{A}, \mathbf{A}')$  così ottenute sono dunque in numero di

$$(n - d)N_{d-1}.$$

Le stesse coppie si possono ottenere anche con procedimento inverso, partendo da ciascuno dei possibili  $N_d$  alberi di tipo  $d$ . Sia  $\mathbf{A}'$  un albero di tipo  $d$ , e sia  $w_i$  ( $i := 1, \dots, d$ ) uno dei  $d$  vertici adiacenti a  $v_1$ . Sopprimendo il lato  $\{w_i, v_1\}$  si ottiene un grafo con due componenti connesse:  $\mathbf{K}_i$  (quella cui appartiene  $w_i$ ) e  $\mathbf{K}_i'$  (quella cui appartiene  $v_1$ ). Per ottenere un albero  $\mathbf{A}$  di tipo  $d - 1$  dal quale col procedimento prima descritto si riottenga  $\mathbf{A}'$ , basta e bisogna aggiungere un lato  $\{w_i, v\}$  con  $v$  vertice diverso da  $v_1$  e non appartenente a  $\mathbf{K}_i$ .



Se indichiamo con  $n_i$  il numero dei vertici di  $\mathbf{K}_i$ , per ogni scelta di  $w_i$  in  $\mathbf{A}'$  ciò può essere fatto in  $(n-1) - n_i$  modi diversi; il numero degli alberi di tipo  $d-1$  associabili in questo modo a ciascuno dei possibili  $N_d$  alberi di tipo  $d$  è

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d (n-1-n_i) &= nd - d - \sum_{i=1}^d n_i = \\ &= nd - d - (n-1) = nd - d - n + 1 = (d-1)(n-1) \end{aligned}$$

e quindi il numero di tutte le possibili coppie  $(\mathbf{A}, \mathbf{A}')$  con  $\mathbf{A}$  albero di tipo  $d-1$  e  $\mathbf{A}'$  albero di tipo  $d$  si può esprimere anche come

$$(d-1)(n-1)N_d.$$

In altri termini, abbiamo ottenuto che

$$(n-d)N_{d-1} = (d-1)(n-1)N_d. \quad (^\circ)$$

Questa relazione tra  $N_{d-1}$  e  $N_d$  ci permette ora di dimostrare, con un procedimento di “induzione alla rovescia” che

$$N_d = \binom{n-2}{d-1} (n-1)^{n-d-1}. \quad (*)$$

Infatti, la (\*) è vera per  $d := n-1$  essendo

$$1 = \binom{n-2}{n-2} (n-1)^{n-(n-1)-1} = (n-1)^0.$$

Supposta vera la (\*) per  $d$ , proviamola per  $d-1$ ; proviamo cioè che

$$N_{d-1} = \binom{n-2}{d-2} (n-1)^{n-(d-1)-1}. \quad (**)$$

Dalla ( $^\circ$ ) si ricava che

$$N_{d-1} = \frac{(d-1)(n-1)}{(n-d)} N_d$$

e quindi, tenendo conto dell’ipotesi di induzione (espressa dalla (\*)), che

$$N_{d-1} = \frac{(d-1)(n-1)}{(n-d)} \binom{n-2}{d-1} (n-1)^{n-d-1}$$

da cui subito la (\*\*).

Allora il numero degli alberi *diversi* con vertici  $v_1, v_2, \dots, v_n$  è

$$\begin{aligned} \sum_{d=1}^{n-1} N_d &= \sum_{d=1}^{n-1} \binom{n-2}{d-1} (n-1)^{n-d-1} = \sum_{\delta=0}^{n-2} \binom{n-2}{\delta} (n-1)^{n-\delta-2} = \\ &= \sum_{\delta=0}^{n-2} \binom{n-2}{\delta} 1^\delta (n-1)^{(n-2)-\delta} = (1 + (n-1))^{n-2} = n^{n-2} \end{aligned}$$

e il teorema è completamente provato.



# Complementi sui grafi piani

Ricordiamo che un grafo si dice **piano** se può essere “disegnato” nel piano in modo che due suoi lati distinti non abbiano mai punti in comune (tranne ovviamente l’eventuale vertice con cui siano entrambi incidenti).

In un disegno come sopra di un grafo piano, il piano viene suddiviso in regioni connesse, ciascuna delle quali delimitata da un ciclo del grafo (formato quindi da almeno tre lati se il grafo è semplice). Tali regioni vengono dette le **facce** del grafo.

Naturalmente le facce del grafo dipendono da come viene disegnato; esistono infatti ovviamente infiniti modi di disegnare (nel piano) un grafo piano (in modo che due suoi lati distinti non abbiano mai punti in comune, tranne l’eventuale vertice con cui siano entrambi incidenti). Però il numero delle facce di un grafo piano dipende soltanto dal numero dei suoi vertici e dal numero dei suoi lati, come abbiamo visto quando abbiamo dimostrato la

## **Formula di Eulero**

Sia  $\Gamma$  un grafo piano connesso con  $v$  vertici,  $l$  lati e  $f$  facce. Allora

$$v - l + f = 2.$$

Più in generale, se  $\Gamma$  è un qualsiasi grafo piano con  $v$  vertici,  $l$  lati e  $f$  facce, si ha

$$v - l + f = 1 + k$$

dove  $k$  è il numero delle componenti connesse di  $\Gamma$ .

In questi appunti ci occupiamo di poliedri. Ad ogni poliedro dello spazio tridimensionale si può associare un grafo nel quale

- i vertici sono i vertici del poliedro;
- i lati sono gli spigoli del poliedro.

Possiamo “disegnare” nel piano il grafo di un qualsiasi poliedro immaginando di “aprirne” una faccia e “modificarne con continuità” l’ “involucro”, “spiacciando” tale “involucro” sul piano. L’eccessivo uso delle virgolette (“ ”) nel periodo precedente fa capire che non abbiamo propriamente fatto un’affermazione rigorosa; ad ogni modo nel seguito daremo per acquisito che ad ogni poliedro si può associare come sopra un grafo piano (nel quale, notiamolo incidentalmente, le facce sono (in corrispondenza biunivoca con) le facce del poliedro).

Per la formula di Eulero si ha che

## **Teorema P.1 (Eulero)**

In qualsiasi poliedro con  $v$  vertici,  $l$  lati e  $f$  facce, si ha

$$v - l + f = 2.$$

Nel seguito di questa sezione indicheremo con  $\mathbf{P}$  un poliedro e con  $\Gamma(\mathbf{P})$  il grafo ad esso associato come descritto sopra. Indicheremo con  $v$  il numero dei vertici, con  $l$  il numero dei lati e con  $f$  il numero delle facce di  $\Gamma(\mathbf{P})$  (ossia, rispettivamente, il numero dei vertici, il numero degli spigoli e il numero delle facce di  $\mathbf{P}$ ). Inoltre, per ogni numero intero positivo  $i$  indicheremo

- con  $v_i$  il numero dei vertici di  $\Gamma(\mathbf{P})$  (e quindi di  $\mathbf{P}$ ) di grado  $i$  ;
- con  $f_i$  il numero delle facce di  $\Gamma(\mathbf{P})$  delimitate da un  $i$ -ciclo (e quindi il numero delle facce di  $\mathbf{P}$  costituite da un poligono di  $i$  lati).

In  $\Gamma(\mathbf{P})$ , per costruzione, non ci sono vertici di grado 1 oppure 2; in effetti, ogni lato appartiene al confine fra esattamente due facce (ciascuna delle quali delimitata da un  $i$ -ciclo con  $i \geq 3$ ). Possiamo dedurne che

$$2l = \sum_{i \geq 3} i \cdot v_i = \sum_{i \geq 3} i \cdot f_i. \quad (*)$$

### **Teorema P.2**

In  $\mathbf{P}$  c'è almeno una faccia costituita da un poligono con al più 5 lati.

*Dimostrazione* – Procediamo per assurdo, e supponiamo che ogni faccia di  $\mathbf{P}$  abbia almeno 6 lati. La (\*) diventa

$$2l = \sum_{i \geq 3} i \cdot v_i = \sum_{i \geq 6} i \cdot f_i \quad .$$

Dall'uguaglianza

$$2l = \sum_{i \geq 6} i \cdot f_i$$

ricaviamo che

$$2l \geq \sum_{i \geq 6} 6f_i = 6 \cdot \sum_{i \geq 6} f_i = 6f$$

ossia  $f \leq \frac{l}{3}$ .

Dall'uguaglianza

$$2l = \sum_{i \geq 3} i \cdot v_i$$

ricaviamo che

$$2l \geq \sum_{i \geq 3} 3v_i = 3 \cdot \sum_{i \geq 3} v_i = 3v$$

ossia  $v \leq \frac{2l}{3}$ .

Dalla formula di Eulero allora

$$2 = v - l + f \leq \frac{2l}{3} - l + \frac{l}{3} = 0$$

e abbiamo raggiunto un assurdo, come si voleva.

### **Teorema P.3**

Supponiamo che in **P** ogni vertice abbia lo stesso grado  $g$  e ogni faccia sia costituita da un poligono con esattamente  $n$  lati.

Si possono verificare soltanto i seguenti cinque casi:

- (a)  $n = 3, \quad g = 3, \quad v = 4, \quad f = 4;$
- (b)  $n = 3, \quad g = 4, \quad v = 6, \quad f = 8;$
- (c)  $n = 3, \quad g = 5, \quad v = 12, \quad f = 20;$
- (d)  $n = 4, \quad g = 3, \quad v = 8, \quad f = 6;$
- (e)  $n = 5, \quad g = 3, \quad v = 20, \quad f = 12.$

*Dimostrazione* – Per ipotesi,  $v_i = 0$  tranne per  $i := g$  e  $f_i = 0$  tranne per  $i := n$ . Dunque la (\*) diventa

$$2l = gv_g = nf_n$$

ossia (poiché  $v = v_g$  e  $f = f_n$ )

$$2l = gv = nf. \quad (**)$$

Dalla formula di Eulero si ha

$$-2 = l - v - f$$

ossia

$$-8 = 4l - 4v - 4f = 2l + 2l - 4v - 4f$$

e ricordando la (\*\*)

$$-8 = gv + nf - 4v - 4f$$

cioè

$$-8 = (g - 4)v + (n - 4)f. \quad (***)$$

Le (\*\*) e (\*\*\*) forniscono il sistema

$$(\circ) \quad \begin{cases} gv = nf \\ (g - 4)v + (n - 4)f = -8 \end{cases}$$

di due equazioni nelle quattro incognite  $f, v, n, g$ .

Le soluzioni che cerchiamo sono date, ovviamente, da numeri interi positivi; ma per le incognite  $n$  e  $g$  abbiamo limitazioni molto forti.

Ovviamente  $3 \leq n$ ; d'altro lato, per il teorema P.2 deve essere  $n \leq 5$ , dunque

$$3 \leq n \leq 5.$$

Allo stesso modo,  $3 \leq g$ ; d'altro lato, per l'analogo teorema P.2 (ripostato sugli appunti del prof. Casolo, Corollario 2.8 a pagina 32) deve essere  $g \leq 5$ , dunque

$$3 \leq g \leq 5.$$

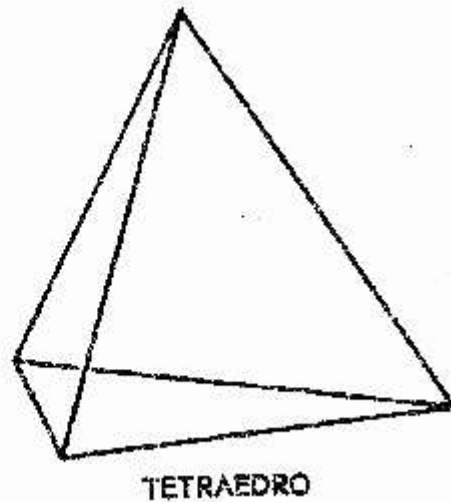
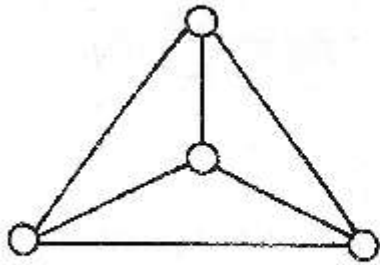
In sostanza, abbiamo nove casi di valori da sostituire a  $n$  e  $g$  per risolvere poi rispetto a  $v$  e  $f$  il sistema ottenuto da ( $\circ$ ).

**Caso 1:**  $n := 3, g := 3.$

Il sistema (°) diventa

$$(\circ) \quad \begin{cases} 3v = 3f \\ -v - f = -8 \end{cases}$$

da cui  $v = f = 4.$

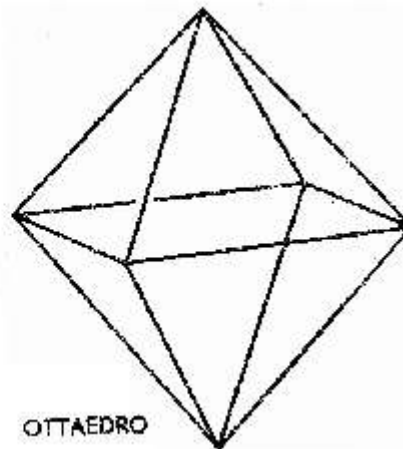
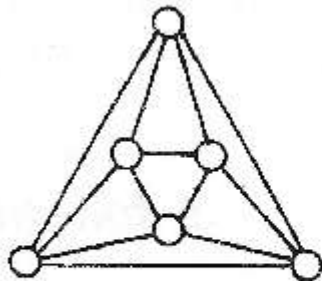


**Caso 2:**  $n := 3, g := 4.$

Il sistema (°) diventa

$$(\circ) \quad \begin{cases} 4v = 3f \\ -f = -8 \end{cases}$$

da cui  $v = 6$  e  $f = 8.$

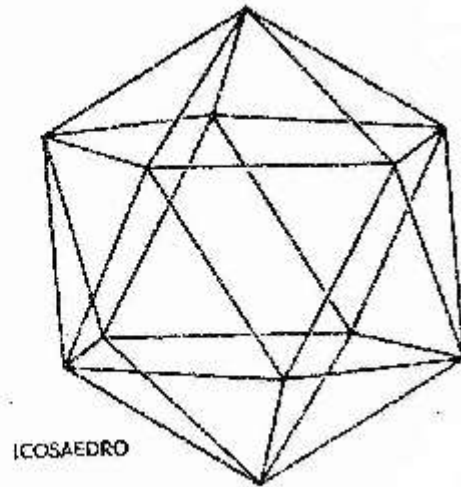
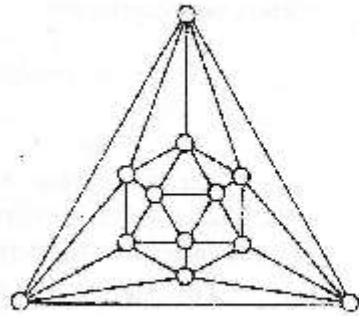


**Caso 3:**  $n := 3, g := 5.$

Il sistema (°) diventa

$$(\circ) \quad \begin{cases} 5v = 3f \\ v - f = -8 \end{cases}$$

da cui  $v = 12$  e  $f = 20.$

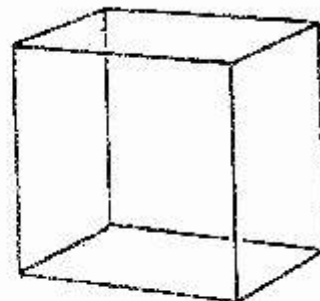
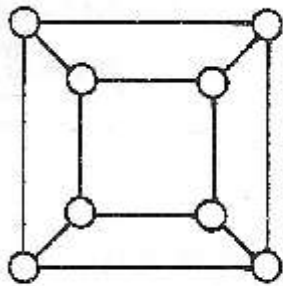


**Caso 4:**  $n := 4, g := 3.$

Il sistema (°) diventa

$$(\circ) \quad \begin{cases} 3v = 4f \\ -v = -8 \end{cases}$$

da cui  $v = 8$  e  $f = 6.$



**Caso 5:**  $n := 4, g := 4$ .

Il sistema (°) diventa

$$(\circ) \quad \begin{cases} 4v = 4f \\ 0 = -8 \end{cases}$$

e dunque non ha soluzioni.

**Caso 6:**  $n := 4, g := 5$ .

Il sistema (°) diventa

$$(\circ) \quad \begin{cases} 5v = 4f \\ v = -8 \end{cases}$$

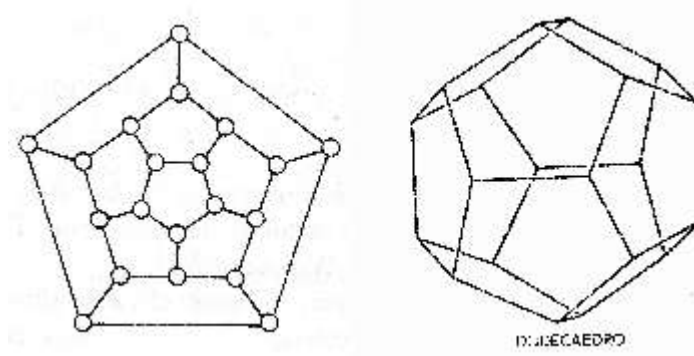
da cui  $v = -8, f = -10$ , soluzione non accettabile.

**Caso 7:**  $n := 5, g := 3$ .

Il sistema (°) diventa

$$(\circ) \quad \begin{cases} 3v = 5f \\ -v + f = -8 \end{cases}$$

da cui  $v = 20, f = 12$ .



**Caso 8:**  $n := 5, g := 4$ .

Il sistema (°) diventa

$$(\circ) \quad \begin{cases} 4v = 5f \\ f = -8 \end{cases}$$

da cui  $v = -10, f = -8$ , soluzione non accettabile.

**Caso 9:**  $n := 5, g := 5$ .

Il sistema (°) diventa

$$(\circ) \quad \begin{cases} 5v = 5f \\ v + f = -8 \end{cases}$$

da cui  $v = f = -4$ , soluzione non accettabile.